سلسلـــة رقم 6 :
الاعداد العقدية الجزء 2

تمرين 1:(الدورة العادية 2007)

1) أ- اكتب على الشكل الجبري العدد العقدي $(3-2i)^2$

ب- حل في مجموعة الاعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$z^2-2(4+i)z+10+20i=0$$

2) نعتبر في المستوى العقدي المنسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A و B و C التي الحاقها على التوالي هي: $a=1+3i$ و $b=7-i$ و $c=5+9i$

أ- بين ان : $\frac{c-a}{b-a}=i$

ب- استنتج ان المثلث ABC متساوي الساقين و قائم زاوية

تمرين 2 : (دورة الاستدراكية 2008)

1) حل في مجموعة الاعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$z^2-8z+17=0$$

2) نعتبر في المستوى العقدي المنسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ النقط A و B التي الحاقها على التوالي هي: $a=4+i$ و $b=8+3i$

ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه النقطة Ω التي لحقها هو $\omega=1+2i$ وزاويته هي $\frac{3}{2}$

أ- بين ان : $z'=-iz-1+3i$

ب- تحقق من ان لحق النقطة C صورة النقطة A بالدوران R هو $c=-i$

ج- بين ان : $b-c=2(a-c)$ ثم استنتج ان النقط A و B و C مستقيمية

تمرين 3:(دورة العادية 2009)

نعتبر في المستوى العقدي المنسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A و B و C التي الحاقها على التوالي هي: $a=2-2i$ و $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $c=1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i$

1) اكتب على الشكل المثلثي كلا من العددين العقديين a و b

2) نعتبر الدوران R الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{5}{6}$

أ- ليكن z لحق نقطة M من المستوى العقدي و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R

بين ان : $z'=bz$

ب- تحقق من ان النقطة C هي صورة النقطة A بالدوران R

3) بين ان : $\arg c\equiv arga+\arg b[2\pi]$ ثم حدد عمدة للعدد العقدي c

تمرين 4:(الدورة العادية 2010)

1) حل في مجموعة الاعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$z^2-6z+10=0$$

2) نعتبر في المستوى العقدي المنسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ النقط A و B و C التي الحاقها على التوالي هي: $a=3-i$ و $b=3+i$ و $c=7-3i$

ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه النقطة Aوزاويته هي $\frac{\pi}{2}$

أ) بين ان : $z'=iz+2-4i$

ب) تحقق من ان لحق النقطة C' صورة النقطة C بالدوران R هو $c'=5+3i$

ج) بين ان : $\frac{c'-b}{c-b}=\frac{i}{2}$ ثم استنتج ان المثلث BCC' قائم الزاوية في B و ان BC=2BC'

تمرين 5: (الدورة العادية 2011)

1) حل في مجموعة الاعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$z^2-18z+82=0$$

2) نعتبر في المستوى العقدي المنسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر$(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A و B و C التي الحاقها على التوالي هي: $a=9+i$ و $b=9-i$ و $c=11-i$

أ- بين ان $\frac{c-b}{a-b}=-i$ ثم استنتج ان المثلث ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في B

ب- اعط الشكل المثلثي للعدد العقدي $4(1-i)$

ج- بين ان $(c-a)(c-b)=4(1-i)$ ثم استنتج ان $AC\times BC=4\sqrt{2}$

د- ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه النقطة B وزاويته هي $\frac{3\pi}{2}$

بين ان : $z'=-iz-10+8i$ ثم تحقق من ان لحق النقطة C' صورة النقطة C بالدوران R هو $9-3i$

تمرين 6 (دورة العادية 2012)

1) حل في مجموعة الاعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$z^2-12z+61=0$$

2) نعتبر في المستوى العقدي المنسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ النقط A و B و C التي الحاقها على التوالي هي: $a=6-5i$ و $b=4-2i$ و $c=2+i$

أ- احسب $\frac{a-c}{b-c}$ واستنتج ان النقط A و B و C مستقيمية

ب-نعتبر الازاحة T ذات المتجهة $\vec{u}$ حيث لحق $\vec{u}$ هو $1+5i$

ج- بين ان : $\frac{d-c}{b-c} = -1+i$ و ان $\frac{3\pi}{4}$ عمدة للعدد العقدي $-1+i$

ب- استنتج قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}})$

<u>تمرين 7:(الدورة الاستدراكية 2012)</u>

نعتبر في المستوى العقدي المنسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر$(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A و B و C التي الحاقها على التوالي هي : $a=2-i$ و $b=6-7i$ و $c=8+3i$

1) أ- بين ان $\frac{c-a}{b-a} = i$

ب- استنتج ان المثلث ABC ومتساوي الساقين و قائم زاوية في A

2) ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z’ لحق النقطة M’ صورة M بالدوران R الذي مركزه النقطة Ω منتصف القطعة $[B]$وزاويته هي $\frac{-\pi}{2}$

أ- تحقق من ان لحق النقطة Ω هو $\omega = 7-2i$

ب- بين ان : $z' = -iz+9+5i$

ج- بين ان النقطة C صورة النقطة A بالدوران R

<u>تمرين 8:</u>

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة

$$(E): z^3+(1+i)z^2+(-1+i)z-i=0$$

1) بين ان المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرفا z_0

2) حدد الاعداد الحقيقية a و b و c التي تحقق :

$$\boldsymbol{z^3+(1+i)z^2+(-1+i)z-i = (z-z_0)(az^2+bz+c)}$$

3) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

<u>تمرين 9</u>

1) لكل z من $\mathbb{C}$ نضع :

$$P(z) = z^3-3z^2+3z+7$$

أ- بين انه اذا كان z_0 حلا للمعادلة $P(z)=0$ فإن $\overline{z_0}$ حل للمعادلة $P(z)=0$

ب- تحقق من ان : $z_0 = 2+i\sqrt{3}$ حل للمعادلة $P(z)=0$، ثم استنتج حلا أخر للمعادلة $P(z)=0$

ج- حدد العدد الحقيقي a الذي يحقق : لكل z من $\mathbb{C}$

$$P(z) = (z+a)(z-2-i\sqrt{3})(z-2+i\sqrt{3})$$

د- استنتج حلول المعادلة $P(z)=0$

2) نعتبر في المستوى العقدي المنسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر$(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A و B و C و G التي الحاقها على التوالي هي : $a=-1$ و $b=2+i\sqrt{3}$ و $c=2-i\sqrt{3}$ و g=3

أ- مثل النقط A و B وC و G

ب- احسب AB و BC و AC ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

ج- حدد شكلا مثلثا للعدد العقدي $\frac{z_A-z_C}{z_G-z_C}$، ثم استنتج طبيعة المثلث GAC

<u>تمرين 10</u>

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة

$$(E): 2z^3+14z^2+41z+68=0$$

1) تحقق من ان $z_1 = -4$ حل للمعادلة (E)

2) حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون لدينا لكل z من $\mathbb{C}$

$$z^3+14z^2+41z+68 = (2z+4)(2z^2+az+b)$$

3) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

نرمز للحلين الآخرين للمعادلة (E) ب z_2 و z_3، بحيث $Im(z_2)>0$

4) نعتبر في المستوى العقدي النقط A و B و C التي الحاقها z_1 و z_2 و z_3 على التوالي

أ- احسب $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

ب- حدد لحقي النقطتين D و E بحيث يكون الرباعي BCDE مربعا مركزه A

<u>تمرين 11 :</u>

ليكن x عددا حقيقيا بحيث : $x \not\equiv 0[2\pi]$

لكل n من $\mathbb{N}^*$، نضع : $S_n = 1+e^{ix}+\cdots+e^{inx}$

1) بين ان :

$$\forall\theta\in\mathbb{R}\,;\,1-e^{i\theta} = (-2i\sin\frac{\theta}{2})e^{\frac{\theta}{2}i}$$

2) بين ان : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ S_n = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}$

3) استنتج ان : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ S_n = \frac{\sin(\frac{(n+1)}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}e^{i\frac{nx}{2}}$

4) نأخذ في السؤال : $x=\frac{\pi}{n}$ حيث $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ نضع

$$\boldsymbol{A_n = 1+\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots+\cos(\frac{(n-1)\pi}{n})}$$

و

$$\boldsymbol{B_n = 1+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots+\sin(\frac{(n-1)\pi}{n})}$$

تحقق من ان :

$$\boldsymbol{S_{n-1} = A_n+iB_n}$$

ثم استنتج ان :

$$\boldsymbol{B_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}}$$