المعادلات التفاضلية

استاذ : عبدالفتاح قويدر

I- المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى $y' = ay + b$

1-1- المعادلة التفاضلية $y' = b$ $(b \in \mathbb{R})$

خاصية 1

الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = b$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي :

$y : x \mapsto bx + c$ مع c عدد حقيقي

2-1- المعادلة التفاضلية $y' = ay$ $(a \in \mathbb{R})$

الخاصية 2

ليكن a و x_0 و y_0 من المجموعة $\mathbb{R}$

الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = ay$ هو $y = \alpha e^{ax}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$

المعادلة التفاضلية $y' = ay$ تقبل حلا وحيدا y يحقق الشرط $y(x_0) = y_0$ وهو $y = \alpha e^{a(x-x_0)}$

تطبيق 1

1- حل المعادلة التفاضلية : $(1)\ y' = \sqrt{3}y$

2- حدد الخاص y للمعادلة التفاضلية (1) بحيث $y(0) = 1$

الحل 2

1) لدينا $y' = \sqrt{3}y$

ومنه حلول المعادلة التفاضلية (1) هي الدوال y المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي

$y(x) = \alpha e^{\sqrt{3}x}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$

2) بما أن y حل المعادلة التفاضلية (1)

فإن $y(x) = \alpha e^{\sqrt{3}x}$ $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ و $\exists x \in \mathbb{R}$

لدينا $y(0) = 1$ وبالتالي لنعوض $x = 0$ في $y(x) = \alpha e^{\sqrt{3}x}$

اذن $\alpha = 1 = y(0) = \alpha e^{\sqrt{3}\times 0}$ يعني $\alpha = 1$ (لأن $e^{\sqrt{3}\times 0} = e^0 = 1$)

ومنه $y(x) = 1.e^{\sqrt{3}x} = e^{\sqrt{3}x}$

1-3- المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$

خاصية 3

ليكن a و b و y_0 من المجموعة $\mathbb{R}$ و a من $\mathbb{R}^*$

حلول المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ هو $y = \alpha e^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$

ليكن a و x_0

المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ تقبل حلا وحيدا y يحقق الشرط $y(x_0) = y_0$ وهو $y = \alpha e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$

تطبيق 4

1- حدد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية $(1)\ 2y' - y = 1$

2- حدد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية(1) بحيث $y(2) = 1$

الحل 4

-1 لدينا $(1)\ 2y' - y = 1 \iff 2y' = y + 1$

$$\iff y' = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$$

ومنه حلول المعادلة التفاضلية (1) هي الدوال y المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي

$$y(x) = \alpha e^{\frac{1}{2}x} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \alpha e^{\frac{1}{2}x} - 1 \quad \text{حيث } \alpha \in \mathbb{R}$$

-2 لنحدد الحل الخاص للمعادلة (1) بحيث $y(2) = 1$

لنعوض $x = 2$ في المعادلة (1)

$$1 = y(2) = \alpha e^{\frac{1}{2}*2} - 1 \iff \alpha e^{1} = 2 \iff \alpha = \frac{2}{e}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y(x) = \frac{2}{e} e^{\frac{1}{2}x} - 1$$

المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية $y'' + ay' + y = 0$

تعريف

ليكن a و b عددان حقيقيان

المعادلة $r^2 + ar + b = 0$ تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية $y'' + ay' + y = 0$

الخاصية4 :

ليكن a و b عددان حقيقيان ولتكن المعادلة التفاضلية $y'' + ay' + y = 0\ (E)$ و $r^2 + ar + b = 0$ معادلتها المميزة وليكن $\Delta = a^2 - 4b$ مميز المعادلة المميزة

اذا كان $\Delta > 0$: المعادلة المميزة تقبل حلين مختلفين r_1 و r_2 ومجموعة الحلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي $y: x \mapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$, حيث α و β من $\mathbb{R}$

اذا كان $\Delta = 0$: المعادلة المميزة تقبل حل مزدوج r_0 ومجموعة الحلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي

$y: x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{r_0 x}$, حيث α و β من $\mathbb{R}$

اذا كان $\Delta < 0$: المعادلة المميزة تقبل حلان عقديان مترافقان $r_1 = p + iq$ و $r_2 = p - iq$,حيث p و q من $\mathbb{R}$ ومجموعة الحلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي

$y: x \mapsto e^{px}(\alpha\cos(qx) + \beta\sin(qx))$, حيث α و β من $\mathbb{R}$

الخاصية 5

يوجد حل وحيد للمعادلة التفاضلية (E) يحقق الشرطين البدئيين $y(x_0) = y_0$ و $y'(x_0) = z_0$ حيث x_0 و y_0 و z_0 اعداد حقيقية

ملحوظة

يمكن كتابة $\alpha\cos(qx) + \beta\sin(qx)$ على شكل $A\cos(qx + B)$ حيث $A, B \in \mathbb{R}$

تطبيق 5

-1 حل المعادلة التفاضلية $(E): y'' + 2y' + y = 0$

-2 حدد الحل الخاص y_1 حيث $y_1(0) = 0$ و $y'_1(0) = 1$

الحل 5

-1 لنحدد حل المعادلة التفاضلية $(E): y'' + 2y' + y = 0$

المعادلة المميزة للمعادلة (E) هي $r^2 + 2r + 1 = 0$

لنحسب $\Delta = a^2 - 4b = 2^2 - 4 \times 1 = 0$

وبالتالي المعادلة المميزة تقبل حل مزدوج $y_0 = \frac{-b}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

ومنه الحل العام للمعادلة (E) هو $y: x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{-1x}$ حيث α و β من $\mathbb{R}$

-2 لنحدد الحل y_1 بحيث $y_1(0) = 0$ و $y'_1(0) = 1$

لدينا $y_1: x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{-1x}$ حيث α و β من $\mathbb{R}$

وبالتالي $y'_1 = (\alpha x +)'e^{-1x} + (e^{-1x})'(\alpha x + \beta) \Leftrightarrow y'_1(x) = \left((\alpha x + \beta)e^{-1x}\right)'$

$= \alpha e^{-x} - (\alpha x + \beta)e^{-x} = e^{-x}(\alpha - \alpha x + \beta)$

تذكير $(uv)' = u'v + v'u$

ومنه $y'_1(x) = e^{-x}(\alpha - \alpha x + \beta)$ حيث α و β من $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_1'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha * 0 + \beta)e^{-1*0} = 0 \\ e^{-0}(\alpha - \alpha * 0 + \beta) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

وبالتالي : الحل y_1 الذي يحقق الشرطين $\begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_1'(0) = 1 \end{cases}$ هو الدالة: $y_1: x \mapsto xe^{-x}$ لكل x من $\mathbb{R}$

حالات خاصة :

-1 المعادلة التفاضلية $y'' = 0$

-الحل العام للمعادلة التفاضلية : $y'' = 0$

هو $y = \alpha x + \beta$; $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

-2 المعادلة التفاضلية $y'' + by = 0$ $(b \in \mathbb{R}^*)$

-الحل العام للمعادلة التفاضلية : $y'' + \omega^2 y = 0$ $(\omega \in \mathbb{R}^*)$

هو $y = \alpha cos\omega x + \beta sin\omega x$; $(\alpha , \beta) \in \mathbb{R}^2$

-الحل العام للمعادلة التفاضلية : $y'' - \omega^2 y = 0$ $(\omega \in \mathbb{R}^*)$

هو $y: x \mapsto \alpha e^{\omega x} + \beta e^{-\omega x}$; $(\alpha , \beta) \in \mathbb{R}^2$

-3 المعادلة التفاضلية $y'' + by' = 0$ $((b \in \mathbb{R}^*)$

-الحل العام للمعادلة التفاضلية : $y'' + \omega y' = 0$ $(\omega \in \mathbb{R}^*)$

هو $y: x \mapsto \alpha + \beta e^{-\omega x}$; $(\alpha , \beta) \in \mathbb{R}^2$